

Uma nova abordagem para estimação de parâmetros básicos de sedimentação

A new approach for estimation of basic sedimentation parameters

DOI: 10.46814/lajdv5n3-007

Recebimento dos originais: 17/11/2023

Aceitação para publicação: 18/12/2023

Antônio Santos Silva

Doutor em Engenharia Química pela Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ)

Instituição: Universidade Federal de Sergipe (UFS)

Endereço: Av. Marcelo Deda Chagas, s/n, Rosa Elze, São Cristóvão - SE, CEP: 49107-230

E-mail: ass@academico.ufs.br

Edilson de Jesus Santos

Doutor em Engenharia Química pela Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP)

Instituição: Universidade Federal de Sergipe

Endereço: Av. Marcelo Deda Chagas, s/n, Rosa Elze, São Cristóvão - SE, CEP: 49107-230

E-mail: edilsonjs@academico.ufs.br

Rogério Luz Pagano

Doutor em Engenharia Química

Instituição: Universidade Federal de Sergipe (UFS)

Endereço: Av. Marcelo Deda Chagas, s/n, Rosa Elze, São Cristóvão - SE, CEP: 49107-230

E-mail: rpagano@academico.ufs.br

Pedro Leite de Santana

Doutor em Engenharia Química pela Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP)

Instituição: Universidade Federal de Sergipe (UFS)

Endereço: Av. Marcelo Deda Chagas, s/n, Rosa Elze, São Cristóvão - SE, CEP: 49107-230

E-mail: santana@academico.ufs.br

José Jailton Marques

Doutor em Engenharia Química pela Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP)

Instituição: Universidade Federal de Sergipe (UFS)

Endereço: Av. Marcelo Deda Chagas, s/n, Rosa Elze, São Cristóvão - SE, CEP: 49107-230

E-mail: jjailton@academico.ufs.br

RESUMO

Este trabalho, com base em modelagem matemática da sedimentação gravitacional em proveta para as regiões de sedimentação livre e de transição, trata da estimação de parâmetros básicos de sedimentação por meio da comparação de duas velocidades funções da porosidade, feita com o objetivo de transferir informações da velocidade determinada pelo modelo matemático para outra na forma de função potência com uma nova base, a qual na porosidade inicial é uma velocidade do tipo Richardson e Zaki. A velocidade do modelo matemático é a das partículas sólidas na região de transição, e é dada por uma equação que envolve as velocidades de sedimentação livre e da onda de aceleração e a porosidade inicial. Os parâmetros, obtidos a partir das equações resultantes da comparação, ficam estabelecidos em função da porosidade inicial e das velocidades de sedimentação livre e da onda de aceleração, sendo tais velocidades determinadas

diretamente do modelo matemático juntamente com os dados experimentais de altura versus tempo da interface superior descendente. Os resultados obtidos foram validados com base no expoente de Richardson e Zaki, na velocidade de Stokes e no diâmetro de partícula, sendo a estimação feita com apenas um teste de proveta para cada porosidade inicial, o que caracteriza redução de experimentos.

Palavras-chave: nova abordagem, estimação, parâmetros básicos, sedimentação.

ABSTRACT

This work, based on mathematical modeling of gravitational sedimentation in a test tube for the free and transition sedimentation regions, deals with the estimation of basic sedimentation parameters through the comparison of two velocities functions of porosity, carried out with the aim of transferring information from the velocity determined by the mathematical model to another in the form of a power function with a new base, which in the initial porosity is a Richardson and Zaki type velocity. The velocity of the mathematical model is that of the solid particles in the transition region, and is given by an equation involving the free sedimentation and acceleration wave velocities and the initial porosity. The parameters, obtained from the equations resulting from the comparison, are established as a function of the initial porosity and the velocities of free sedimentation and the acceleration wave, with such velocities being determined directly from the mathematical model together with the experimental data of interface height versus time. top descending. The results obtained were validated based on the Richardson and Zaki exponent, the Stokes speed and the particle diameter, with the estimation being made with just one test tube for each initial porosity, which characterizes a reduction in experiments.

Keywords: new approach, estimation, basic parameters, sedimentation.

1 INTRODUÇÃO

Modelagem matemática do movimento gravitacional de suspensões particuladas em proveta, ou modelagem matemática da sedimentação gravitacional em proveta, não é simplesmente um problema puro de sedimentação. A modelagem é mais complexa, pois envolve sub-regiões que variam com o tempo e são delimitadas por interfaces em movimento, sendo que em cada região a porosidade e as velocidades satisfazem um sistema de equações diferenciais parciais obtido da teoria contínua de misturas aplicada a um meio poroso com restrição de incompressibilidade, juntamente com suposições constitutivas, Silva e Santana (2007). Além disso, é preciso estabelecer condições iniciais e de contorno, considerar as condições de salto através das interfaces em movimento para caracterizar o problema estabelecido pela modelagem, cuja solução não é tarefa fácil. As soluções de todas as regiões, levando-se em conta as interfaces em movimento, devem ser compatibilizadas. Assim, resolvido o problema de forma completa, a compatibilização permite que parâmetros envolvidos nas soluções sejam levados para a equação da altura versus tempo do movimento da interface superior descendente. Neste sentido, parâmetros envolvidos nas soluções podem ser determinados com dados experimentais de altura versus tempo de tal interface, por comparação da altura teórica com a experimental. Assim,

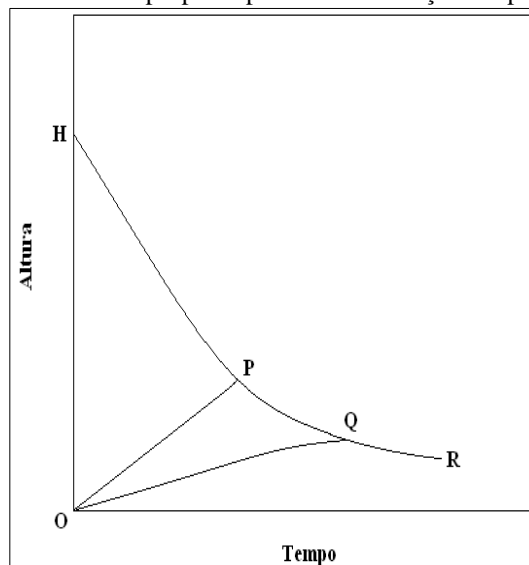
por força da modelagem matemática, dados experimentais de altura versus tempo da interface superior descendente de um teste de proveta são suficientes para estabelecimento de funções porosidade e velocidades em regiões do próprio teste, sendo de fundamental importância destacar as regiões nas quais as soluções são explícitas, pois fornecem informações de forma mais direta. Como tudo é feito no próprio teste de proveta, parâmetros de sedimentação ou de suspensões particuladas são determinados com redução de experimentos, Diehl (2007). Neste trabalho, seguindo Silva *et al.* (2013), foram utilizadas as regiões de sedimentação livre e de transição para a determinação de parâmetros por meio de equações resultantes da comparação de duas velocidades funções da porosidade, feita com o objetivo de transferir informações da velocidade determinada pelo modelo matemático para outra na forma de função potência com uma nova base, a qual na porosidade inicial é uma velocidade do tipo Richardson e Zaki (1954). A comparação e a estrutura da modelagem matemática produziram um conjunto de parâmetros, inclusive clássicos usados para efeito de validação, a exemplo do expoente de Richardson e Zaki (1954), da velocidade de Stokes e do diâmetro de partícula.

2 METODOLOGIA

No estudo da sedimentação gravitacional em proveta, em cada teste, a suspensão é colocada numa proveta de altura e diâmetro adequados, com agitação suficiente para que a condição inicial de concentração de sólidos uniforme seja obtida. As dimensões devem ser tais que os efeitos de parede não interfiram na queda das partículas sólidas, de modo que o movimento possa ser considerado unidimensional.

Como apresentado no trabalho de Silva e Santana (2007), desde o início do movimento de queda das partículas sólidas até o término, a região ocupada pela suspensão na proveta fica dividida em sub-regiões, as quais podem ser caracterizadas de acordo com a Figura 1.

Figura 1 - Gráfico proposto para a sedimentação em proveta.



Fonte: Autoria Própria

No gráfico da Figura 1, OPHO corresponde à região de sedimentação livre, OPQO corresponde à região de transição e a região limitada por OQR e o eixo dos tempos corresponde à região de compressão. As curvas HPQR, OP e OQ correspondem, respectivamente, às alturas da interface superior descendente, da onda de aceleração e da interface inferior ascendente. A altura da interface superior descendente será denotada por $x = x(t)$ para todo $t \geq 0$. A introdução da região de transição OPQO foi motivada pelo trabalho de Kynch (1952) e a revisão da sua teoria feita por Tiller (1981) e estendida pelos trabalhos de Fitch (1983) e Font (1988). A onda de aceleração, que não precisa ser visível, corresponde à propagação inicial da onda de concentração, a única que parte do fundo da proveta. A velocidade das partículas sólidas, na região de transição, foi determinada pelo efeito da suposição de Kynch (1952) sobre os balanços de massa e de quantidade de movimento linear, o qual forneceu uma equação explícita para tal velocidade como função da porosidade.

De acordo com o apresentado em Silva e Santana (2007) e Silva *et al.* (2013), a modelagem matemática com base no gráfico da Figura 1, juntamente com dados experimentais de altura da interface superior descendente versus tempo, fornece um conjunto de parâmetros necessários para a determinação de outros a partir da comparação de duas funções velocidades.

2.1 VELOCIDADE NA REGIÃO DE TRANSIÇÃO

A velocidade absoluta V das partículas sólidas na região de transição é dada por:

$$V(\varepsilon) = (u_0 + w_0) \cdot \frac{1 - \varepsilon_0}{1 - \varepsilon} - w_0 \quad (1)$$

Para $0 < t < t_c$, onde u_0 é a velocidade de sedimentação livre, w_0 é a velocidade da onda de aceleração, ε_0 é a porosidade inicial, t é variável tempo e t_c é o instante de encontro das interfaces.

2.2 VELOCIDADE DE SEDIMENTAÇÃO LIVRE

Na região de sedimentação livre a porosidade é constante e igual ao valor inicial. A velocidade de sedimentação livre é determinada diretamente da parte reta do gráfico x versus t da interface superior descendente.

$$x = H - u_0 \cdot t \quad \text{para } 0 \leq t \leq t_0 \quad (2)$$

Onde H é o valor inicial de x , t é a variável tempo, t_0 é o instante de encontro da onda de aceleração com a interface superior.

2.3 VELOCIDADE DA ONDA DE ACELERAÇÃO

A velocidade da onda de aceleração w_0 é o mínimo da função velocidade W definida por:

$$w = \frac{u_0 \cdot x^2}{2H(H - x) - (2H - x) \cdot u_0 \cdot t} \quad (3)$$

Com denominador positivo, sendo o valor mínimo obtido por substituição em (3) de pontos experimentais x versus t da altura da interface superior descendente. Assim, com base na Equação (2), o ponto (x_0, t_0) de encontro da onda de aceleração com tal interface fica caracterizado por:

$$x_0 = x(t_0) = w_0 t_0 = H - u_0 t_0 \quad (4)$$

$$(u_0 + w_0) \cdot t_0 = H \quad (5)$$

2.4 PONTO DE ENCONTRO DAS INTERFACES

Sendo $x_c = x(t_c)$, o ponto de encontro das interfaces é o ponto (x_c, t_c) onde ocorre o mínimo da função W dada pela Equação (6):

$$W = \frac{u_0 \cdot x}{2(H - x) - u_0 \cdot t} \quad (6)$$

Com denominador positivo, obtido do mesmo modo do mínimo de (3).

2.5 POROSIDADE MÉDIA DA SUSPENSÃO NA PROVETA EM CADA INSTANTE DE ENCONTRO

Estabelecidos os pontos (x_0, t_0) e (x_c, t_c) , do balanço de massa para as partículas sólidas podem ser destacadas duas porosidades médias da suspensão na proveta, uma ξ em $t = t_0$ e outra ε_c em $t = t_c$ expressas nas equações:

$$(1 - \xi) \cdot x_0 = (1 - \varepsilon_0) \cdot H \quad (7)$$

$$(1 - \varepsilon_c) \cdot x_c = (1 - \varepsilon_0) \cdot H \quad (8)$$

Desse modo, das Equações (4), (5) e (7):

$$\xi \equiv 1 - \left(1 + \frac{u_0}{w_0}\right) \cdot (1 - \varepsilon_0) \quad (9)$$

2.6 COMPARAÇÃO DE DUAS FUNÇÕES VELOCIDADES

Sendo n o expoente de Richardson e Zaki (1954) e u_s a velocidade de Stokes, a Equação de Richardson e Zaki (1954), expressa na forma:

$$u_0 = u_s \cdot \varepsilon_0^n \quad (10)$$

Motiva a transferência de informações contidas na Equação (1) para outra na forma de potência, visando a obtenção de outros parâmetros de sedimentação ou de suspensões particuladas, inclusive os da Equação (10). Para isso, sejam $E(\varepsilon)$ e $u(\varepsilon)$ definidas por:

$$E(\varepsilon) = 1 - \alpha(1 - \varepsilon) \quad (11)$$

$$u(\varepsilon) = U \cdot (E(\varepsilon))^n \quad (12)$$

Onde $E(\varepsilon)$ é uma função porosidade, α é uma constante adimensional, U é uma velocidade constante e $u(\varepsilon)$ é uma função potência, a qual na porosidade inicial é uma equação do tipo Richardson e Zaki (1954). Fórmulas para os parâmetros envolvidos nas Equações (10), (11) e (12) podem ser obtidas por comparação de $V(\varepsilon)$ com $u(\varepsilon)$ no sentido de que existe uma porosidade ε_I satisfazendo as condições

$$V(\varepsilon) = u(\varepsilon) \quad (13)$$

$$\frac{dV(\varepsilon_I)}{d\varepsilon} = \frac{du(\varepsilon_I)}{d\varepsilon} \quad (14)$$

$$\frac{d^2V(\varepsilon_I)}{d\varepsilon^2} = \frac{d^2u(\varepsilon_I)}{d\varepsilon^2} \quad (15)$$

Com isso, introduzindo o parâmetro θ dado por

$$\theta \equiv \frac{n-1}{n+1} \quad (16)$$

as condições expressas pelas Equações (13), (14) e (15) e as Equações (1), (9), (11), (12) e (16) mostram que:

$$V(\varepsilon_I) = u(\varepsilon_I) = \theta \cdot w_0 \quad (17)$$

$$\alpha = \frac{1-\theta^2}{1-\xi} \quad (18)$$

$$\varepsilon_I = 1 - \frac{1-\xi}{1+\theta} \quad (19)$$

Então, das Equações (9), (11), (12), (16), (17), (18) e (19):

$$E(\varepsilon_1) = \theta \quad (20)$$

$$E(\xi) = \theta^2 \quad (21)$$

$$w_0 = U\theta^{n-1} \quad (22)$$

As Equações (20) e (21) sugerem um caminho adequado para determinar o expoente de Richardson e Zaki (1954) baseado no parâmetro λ definido por

$$\lambda = 1 - \alpha(2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2) \text{ para } -1 < \lambda < 1 \quad (23)$$

Onde ε_1 e ε_2 são porosidades no domínio da função E .

Das Equações (11) e (23):

$$E(\varepsilon_1) + E(\varepsilon_2) = 1 + \lambda \text{ para } -1 < \lambda < 1 \quad (24)$$

Desse modo, fazendo $\beta = \lambda$ para $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ e $\varepsilon_2 = \xi$ na Equação (24), das Equações (20) e (21):

$$\theta^2 + \theta = 1 + \beta \quad (25)$$

Logo, da Equação (25):

$$\theta = \frac{1}{2}(\sqrt{5 + 4\beta} - 1) \text{ para } -1 < \beta < 1 \quad (26)$$

Assim, com base nas Equações (16) e (26), o expoente n de Richardson e Zaki (1954) fica expresso por:

$$n = \frac{1 + \theta}{1 - \theta} \text{ para } -1 < \theta < 1 \quad (27)$$

As Equações (26) e (27) mostram que n pode ser determinado exclusivamente em termos do parâmetro β que pode ser caracterizado com base nas Equações (9), (11), (16), (18), (19) e (25).

Das equações (9), (16) e (25):

$$\xi < \varepsilon_0 \text{ e } \sqrt{\varepsilon_0} - \xi \leq \xi \text{ para } \varepsilon_0 \geq 0.25 \quad (28)$$

$$4\beta = \theta^2 \text{ se e só se } \theta = 2/3 \text{ ou } n = 5 \quad (29)$$

Das Equações (11), (18) e (19):

$$\alpha = 1 \text{ se e só se } E(\varepsilon) = \varepsilon \quad (30)$$

$$\alpha = 1 \text{ se e só se } \theta^2 = \xi \text{ ou } \varepsilon_1^2 = \xi \quad (31)$$

A condição expressa pela Equação (30) fornece uma referência importante, pois transforma a Equação (12) numa equação do tipo Richardson e Zaki (1954). O valor $n = 5$ é também outra referência para tal expoente. Então, baseado nas Equações (28), (29), (30) e (31) os valores $4\beta = \xi$ e $4\beta = \sqrt{\varepsilon_0} - \xi$ motivam para o parâmetro β a combinação linear expressa por:

$$4\beta = A_1 + A_2(\sqrt{\varepsilon_0} - \xi) + A_3\xi \quad (32)$$

Onde A_1 , A_2 , e A_3 são coeficientes compatíveis com β no intervalo $-1 < \beta < 1$.

As Equações (26) e (27) mostram que, quando β aumenta de -1 até 1, n cresce de 1 até infinito. Ou seja, n pode assumir qualquer valor maior que 1. Em particular, quando β aumenta de -0.435 até 0.224, n cresce de 2.35 até 6.01 e, como outro exemplo de magnitude, $n = 60.18$ para $\beta = 0,903$. Este comportamento e as condições expressas pelas Equações (28), (29), (30) e (31) podem ser usados para caracterizar os coeficientes A_1 , A_2 , e A_3 da Equação (32). Com isso, a expressão de β pode ser aplicada para classificar diferentes categorias de suspensões.

Para fazer uma aplicação da metodologia aqui desenvolvida, consideremos a classe de suspensões cujos coeficientes são dados por:

$$A_1 = 0, A_2 = (1 - \varepsilon_0)/2 \text{ e } A_3 = (1 + \varepsilon_0)/2 \quad (33)$$

Neste caso, das Equações (32) e (33):

$$4\beta = \frac{(1 - \varepsilon_0)}{2} \sqrt{\varepsilon_0} + \varepsilon_0 \xi \quad (34)$$

Com isso, todos os parâmetros resultantes da comparação ficam determinados pelas Equações (9), (16), (18), (19), (22), (26), (27) e (33), onde é importante ressaltar que das Equações (9) e (34) os efeitos de porosidade inicial e velocidades estão implícitos em ξ e β . Conseqüentemente, a velocidade de Stokes (u_s) fica determinada pelas Equações (10) e (27), as quais podem ser usadas para o cálculo do diâmetro médio de Stokes (d_{st}) por meio da fórmula clássica:

$$d_{st} = \left[\frac{18\mu u_s}{(\rho_s - \rho_f)g} \right]^{1/2} \quad (35)$$

onde ρ_s é a densidade das partículas sólidas, ρ_f é a densidade do fluido, g é a aceleração da gravidade e μ é a viscosidade dinâmica do fluido.

Sobre a velocidade U , as Equações (10) e (22) mostram que:

$$U = u_s \quad \text{se e só se} \quad \varepsilon_0 = \theta \left(\frac{u_0}{\theta w_0} \right)^{1/n} \quad (36)$$

Ou seja, existe uma porosidade inicial ε_0 tal que U é a velocidade de Stokes.

Com os parâmetros estabelecidos até aqui, com base nas Equações (11) e (12), podemos introduzir a função fluxo de sólidos q_s definida por:

$$q_s(\varepsilon) = (1 - \varepsilon) \cdot u(\varepsilon) \quad (37)$$

com parte do domínio em regiões do próprio teste de proveta, mas não uma função do primeiro grau como seria o fluxo apenas na região de transição, baseado na Equação (1). Desse modo, a derivada da Equação (37) mostra que a porosidade ε_p dada por:

$$\varepsilon_p = 1 - \frac{1}{\alpha(n+1)} \quad (38)$$

É um ponto crítico de q_s positivo, a qual é mais um parâmetro de um conjunto de parâmetros formado pela união de duas partes. Uma antes da comparação que serve como base para a determinação da outra depois da comparação, incluindo os parâmetros clássicos expoente de Richardson e Zaki (1954), velocidade de Stokes e diâmetro médio de Stokes, estimados para efeito de validação.

3 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Os resultados foram obtidos com base na modelagem matemática juntamente com dados experimentais de altura versus tempo da interface superior descendente, coletados da literatura, onde a velocidade de sedimentação livre u_0 foi determinada por meio da Equação (2).

Para ilustrar o cálculo de w_0 como o valor mínimo da função w definida pela Equação (3), como também o cálculo do ponto (x_0, t_0) de encontro da onda de aceleração com a interface superior descendente, foi elaborada a Tabela 1 com dados experimentais de Schirmer (1980) e Massarani (1984).

Tabela 1 - Determinação do mínimo de w para uma suspensão aquosa de CaCO_3 ($H = 40$ cm, $\varepsilon_0 = 0,960$, $u_0 = 0,43$ cm min^{-1} , $w_0 = \text{mínimo de } w = 0,38$ cm min^{-1}).

t (min)	x (cm)	w (cm min^{-1})
8,50	35,00	2,24
20,10	30,00	1,05
33,30	25,00	0,65
52,50	18,00	0,39
56,00	17,00	0,38
59,50	16,00	0,39
64,10	15,00	0,46

Fonte: Autoria própria

Desse modo, a Tabela 1 e as Equações (4), (5) e (9) fornecem os resultados $t_0 = 49,38$ min, $x_0 = 18,77$ cm e $\zeta = 0,915$. Como, das Equações (1) e (9) ζ é a porosidade que anula a velocidade V , $V(\zeta) = 0$, e também ζ é a porosidade média da suspensão na proveta expressa na Equação (7), então a elaboração da Tabela 1 serve como exemplo para mostrar que, por força da modelagem matemática, dados experimentais de altura versus tempo da interface superior descendente de um único teste de proveta são suficientes para determinar solução com domínio em região do próprio teste, neste caso dada pela Equação (1). Por isso, é importante transferir informações da Equação (1) para outra com outros parâmetros de sedimentação.

O ponto (x_c, t_c) de encontro das interfaces é o ponto onde ocorre o mínimo da função w definida pela Equação (6). Para ilustração do cálculo de tal ponto, foi elaborada a Tabela 2 com os dados experimentais de Tiller e d'Ávila (1980).

Tabela 2 - Ponto de encontro das interfaces para uma suspensão aquosa de microbarita ($H = 42$ cm, $\varepsilon_0 = 0,970$, $u_0 = 4,23$ cm min⁻¹).

t (min)	x (cm)	w (cm min ⁻¹)
7,63	10,00	1,33
7,85	8,75	1,11
8,18	7,50	0,92
8,56	6,25	0,75
8,87	5,63	0,68
10,00	5,00	0,67
10,74	4,74	0,69
12,00	4,30	0,74
14,00	3,60	0,89
16,00	2,89	1,160

Fonte: Autoria própria

De acordo com a Tabela 2, como o mínimo de w é 0,67 cm min⁻¹, o ponto de encontro das interfaces é dado por $t_c = 10,00$ min e $x_c = 5,00$ cm.

As Tabelas 3, 4, 5, 6 e 7 foram elaboradas com base nos dados experimentais de Shannon *et al.* (1964) para suspensões aquosas de esferas de vidro.

Seguindo o que foi feito para as Tabelas 1 e 2, outros resultados sobre a altura x_c estão na Tabela 3.

Tabela 3 - Altura x_c no encontro das interfaces para suspensões aquosas de esferas de vidro.

ε_0	u_0 (cm min ⁻¹)	w_0 (cm min ⁻¹)	x_c (cm)
0,85	10,10	4,56	7,26
0,80	7,56	4,96	7,61
0,75	5,54	5,33	7,64
0,70	4,01	5,19	7,61
0,65	2,80	4,94	7,31
0,60	1,89	3,94	7,29
0,55	1,27	3,13	7,24
0,50	0,83	2,95	7,24
0,45	0,50	2,74	7,24

Fonte: Autoria própria

Cada altura x_c calculada como a altura onde ocorre o mínimo da função w definida pela Equação (6), expressa na Tabela 3, concorda com as determinações efetuadas por Shannon *et al.* (1964).

Com a Tabela 3 e as Equações (8) e (9), foi elaborada a Tabela 4.

Tabela 4 - Porosidades médias ξ e ε_c para suspensões aquosas de esferas de vidro.

ε_0	H (cm)	x_c (cm)	ξ	ε_c
0.85	31,00	7,26	0,518	0,360
0.80	23,25	7,61	0,495	0,389
0.75	18,60	7,64	0,490	0,389
0.70	15,50	7,61	0,468	0,385
0.65	13,29	7,31	0,452	0,364
0.60	11,63	7,29	0,408	0,362
0.55	10,33	7,24	0,367	0,358
0.50	9,30	7,24	0,359	0,358
0.45	8,45	7,24	0,350	0,358

Fonte: Autoria própria

As Tabelas 3 e 4 foram elaboradas para estimação de parâmetros antes da comparação das duas funções velocidades. Elas servem como base para estimação de parâmetros depois da comparação. Assim, com a Tabela 4 e as Equações (26), (27) e (34), foi elaborada a Tabela 5 para os parâmetros β , θ e n (Expoente de Richardson e Zaki), sendo a validação feita com base no expoente de Richardson e Zaki (1954) por comparação do valor experimental dado pela Equação (10) com o teórico fornecido pela Equação (27), uma vez que é dado o valor experimental da velocidade de Stokes (23,52 cm min⁻¹).

É importante destacar os valores para β , θ e n , uma vez que os mesmos são parâmetros determinados após a comparação das duas velocidades como funções da porosidade, os quais são básicos para o estudo da função fluxo de sólidos.

Tabela 5 - Parâmetros β , θ e n para suspensões aquosas de esferas de vidro ($u_s = 23,52$ cm min⁻¹ - valor experimental).

ε_0	β	θ	n (Eq.27)	n (Eq.10)
0,85	0,128	0,674	5,13	5,20
0,80	0,121	0,671	5,08	5,09
0,75	0,119	0,670	5,06	5,03
0,70	0,113	0,668	5,02	4,96
0,65	0,109	0,666	4,98	4,94
0,60	0,100	0,662	4,91	4,94
0,55	0,092	0,659	4,86	4,88
0,50	0,089	0,657	4,83	4,82
0,45	0,085	0,656	4,81	4,82

Fonte: Autoria própria

Por meio da comparação dos valores de n na Tabela 5, os resultados teóricos estão bem próximos dos experimentais e concordam também com os resultados de Chong *et al.* (1979) e Oliver (1961).

Com as Tabelas 3, 4 e 5 e as Equações (10), (22), (26), (27), (34) e (35) foi elaborada a Tabela 6 para os parâmetros U , u_s e d_{St} , sendo a validação feita com base nos valores experimentais da velocidade de Stokes (23,52 cm min⁻¹) e do diâmetro médio de Stokes (67 μ m), a qual mostra resultados bem próximos dos experimentais.

Tabela 6 - Parâmetros U , u_s e d_{St} para suspensões aquosas de esferas de vidro (valor experimental: $\rho_s = 2,45 \text{ g cm}^{-3}$, $d_{St} = 67 \text{ }\mu\text{m}$ e $u_s = 23,52 \text{ cm/min}$).

ε_0	$U \text{ (cm min}^{-1}\text{)}$	$u_s \text{ (cm/min)}$	$d_{St} \text{ (}\mu\text{m)}$
0,85	23,29	23,24	66,2
0,80	25,25	23,49	66,5
0,75	27,10	23,76	66,9
0,70	26,31	24,00	67,3
0,65	24,97	23,94	67,2
0,60	19,82	23,27	66,2
0,55	15,68	23,17	66,1
0,50	14,75	23,68	66,8
0,45	13,67	23,24	66,2

Fonte: Autoria própria

Como previsto na Equação (36), os valores de U da Tabela 6 mostram que existe uma porosidade inicial tal que U é a velocidade de Stokes.

Com as Tabelas 4 e 5 e as Equações (18), (19), (27) e (38) foi elaborada a Tabela 7 para os parâmetros α , ε_I e ε_p .

Tabela 7 - Parâmetros α , ε_I e ε_p para suspensões aquosas de esferas de vidro.

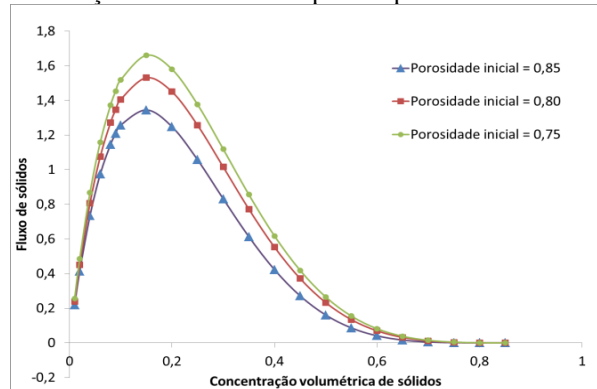
ε_0	α	ε_I	ε_p
0,85	1,132	0,712	0,856
0,80	1,089	0,698	0,849
0,75	1,081	0,695	0,847
0,70	1,041	0,681	0,841
0,65	1,015	0,671	0,835
0,60	0,949	0,644	0,822
0,55	0,894	0,619	0,809
0,50	0,887	0,613	0,807
0,45	0,876	0,607	0,804

Fonte: Autoria própria

Como previsto na Equação (30), os valores de α da Tabela 7 mostram que existe uma porosidade inicial tal que o valor de α é a unidade, e neste caso a Equação (12) é a Equação (10) de Richardson Zaki (1954).

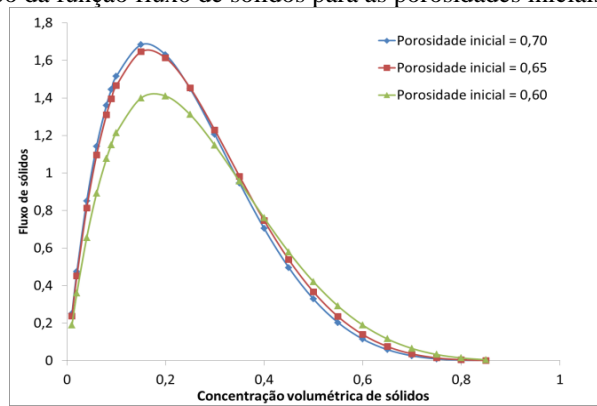
Os resultados teóricos das Tabelas 5, 6 e 7 e as Equações (11), (12) e (37) mostram no gráficos das Figuras 2, 3 e 4 cada função fluxo de sólidos gerada pela comparação das duas funções velocidades, uma curva para cada teste de proveta, e não a curva de todos os testes. A forma de cada curva concorda com a literatura (DIEHL, 2007).

Figura 2 – Gráfico da função fluxo de sólidos para as porosidades iniciais 0,85; 0,80 e 0,75.



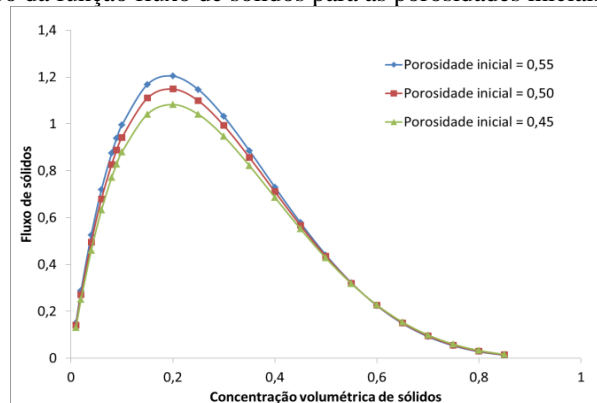
Fonte: Autoria própria

Figura 3 – Gráfico da função fluxo de sólidos para as porosidades iniciais 0,70; 0,65 e 0,60.



Fonte: Autoria própria

Figura 4 – Gráfico da função fluxo de sólidos para as porosidades iniciais 0,55; 0,50 e 0,45.



Fonte: Autoria própria

4 CONCLUSÃO

Por força da modelagem matemática da sedimentação gravitacional em proveta, dados experimentais de altura versus tempo da interface superior descendente de um único teste de proveta são suficientes para estimação de parâmetros de sedimentação, contidos nas soluções do modelo para as regiões de sedimentação livre e transição do próprio teste. A forma explícita da velocidade das partículas sólidas como função da porosidade, na região de transição, permite o aumento do número

de parâmetros estimados por comparação com outra função velocidade. A união dos parâmetros estimados antes e depois da comparação forma uma base de informações para o estudo de parâmetros de sedimentação ou de suspensões particuladas.

REFERÊNCIAS

- CHONG, Y. S ; RATKOWSKY, D. A ; EPSTEIN, N. Effect of Particle-Shape on Hindered Settling in Creeping Flow. **Powder Technology**. v. 23 p.55-66, 1979.
- DIEHL, S. Estimation of the batch-settling flux function for an ideal suspension from only two experiments. **Chemical Engineering Science**. v. 62, p.4589-4601, 2007.
- FITCH, B. Kynch theory and compression zones. **AIChE Journal**. v.29, n.6, p.940-947, 1983.
- FONT, R. Compression zone effect in batch sedimentation. **AIChE Journal**. v. 34, n.2, p. 229-252, 1988.
- KYNCH, G. J. A theory of sedimentation. **Transactions of the Faraday Society**. v.48, p.166-176, 1952.
- MASSARANI, G. **Problemas em Sistemas Particulados**. Rio de Janeiro: Edgard Blücher, 1984.
- OLIVER, D. R. The sedimentation of suspensions of closely-sized spherical particles. **Chemical Engineering Science**. v. 15, p.230-242, 1961.
- RICHARDSON, J. F; ZAKI, W. N. The Sedimentation of A Suspension of Uniform Spheres Under Conditions of Viscous Flow. **Chemical Engineering Science**. v. 3, p.65-73, 1954.
- SCHIRMER, H. P. **Projeto de sedimentador III**. 1980. Dissertação. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1980.
- SHANNON, P. T ; DEHAAS, R. D ; STROUPE, E. P ; TORY, E. M. Batch and Continuous Thickening. Prediction of Batch Settling Behavior from Initial Rate SpheresData with Results for Rigid. **Industrial & Engineering Chemistry Fundamentals**. v. 3, p.250-260, 1964.
- SILVA, A. S.; SANTANA, P. L. Estudo sobre a função porosidade no processo de sedimentação gravitacional em batelada. In: XXXIII Encontro sobre Escoamento em Meios Porosos, 2007, Aracaju. **Anais...** Aracaju, 2007.
- SILVA, A. S. ; SANTANA, P. L. ; PAGANO, R. L. ; E. JESUS ; ROCHA, C. P. S. . Caracterização de suspensões floculentas com base em modelagem matemática da sedimentação em proveta. **Scientia Plena**, v. 9, p. 1-7, 2013.
- TILLER, F. M. Revision of Kynch sedimentation theory. **AIChE Journal**. v.27, p.823-829, 1981.
- TILLER, F. M; D'ÁVILA, J. S. Zona de compressão em sedimentação. In: VIII Encontro sobre Escoamento em Meios Porosos, 1980, Curitiba. **Anais...** Curitiba, 1980.

NOMENCLATURA

x , altura da interface superior descendente, em cm;

t , tempo, em min;

V , velocidade absoluta das partículas sólidas, em cm/min;

u_0 , velocidade de sedimentação livre, em cm/min;

w_0 , velocidade da onda de aceleração, em cm/min;

ε_0 , porosidade inicial, adimensional;

t_c , instante de encontro das interfaces, em min;

t_0 , instante de encontro da onda de aceleração com a interface inferior ascendente, em min;

H , altura inicial da suspensão, em cm;

w , função velocidade, em cm/min;

ζ , porosidade média da suspensão em $t = t_0$;

ε_c , porosidade média da suspensão em $t = t_c$;

n , expoente de Richardson e Zaki;

$E(\varepsilon)$, função porosidade, adimensional;

$\alpha, \beta, \lambda, \theta$, parâmetros adimensionais;

U , velocidade, em cm/min;

u_s , velocidade de Stokes, em cm/min;

ρ_f densidade do fluido, em g/cm³;

g , aceleração da gravidade, em cm/min²;

μ , viscosidade dinâmica do fluido, em g/(cm.min);

q_s , função fluxo de sólidos, em g/(cm².min).